ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009
Môn thi : TOÁN

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I (2 điểm). Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$.
2. Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ $(x \in R)$

Câu III (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1)\cos^2 x dx$

Câu IV (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a; CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu V (1,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có $(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \le 5(y + z)^3$.

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B

A.Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm I (6, 2) là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm M (1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta : x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) : $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Câu VII.a (1,0 điểm). Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

B. Theo Chương trình Nâng Cao

Câu VI.b (2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta : x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) : $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và 2 đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$; $\Delta_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu VII.b (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$ $(x, y \in R)$

BÀI GIẢI

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I.

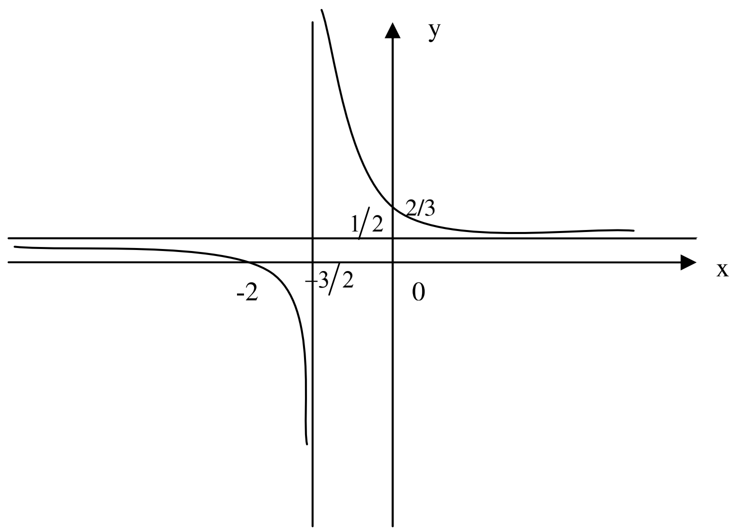
1. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-3}{2} \right\}, y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$

Suy ra hàm số giảm trên từng khoảng xác định và không có cực trị.

$\lim\limits_{x \to \frac{-3}{2}^-} y = -\infty, \lim\limits_{x \to \frac{-3}{2}^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = \dfrac{-3}{2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow TCN : y = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	$\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$



2. Tam giác OAB cân tại O nên tiếp tuyến song song với một trong hai đường thẳng y = x hoặc y = -x. Nghĩa là:

$f'(x_0) = \pm 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$

Δ_1 : y – 1 = -1(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = -x (loại)

Δ_2 : y – 0 = -1(x + 2) $\Leftrightarrow$ y = -x – 2 (nhận)

Câu II.

1. ĐK: $\sin x \neq \dfrac{-1}{2}$, sinx ≠ 1

$$Pt \Leftrightarrow (1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\left(1+\sin x - 2\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \; hay \; \frac{\pi}{3} + x = -2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \text{ (loại) } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, \text{ k} \in \text{Z (nhận)}$$

2. $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$, điều kiện : $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{6}{5}$

Đặt t = $\sqrt[3]{3x-2}$ $\Leftrightarrow t^3 = 3x - 2 \Leftrightarrow$ x = $\dfrac{t^3+2}{3}$ và 6 – 5x = $\dfrac{8-5t^3}{3}$

Phương trình trở thành : $2t + 3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}} - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}} = 8 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ t = -2. Vậy x = -2

Câu III.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right)\cos x dx$$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: x= 0 $\Rightarrow$ t = 0; x = $\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ t = 1

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right)dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

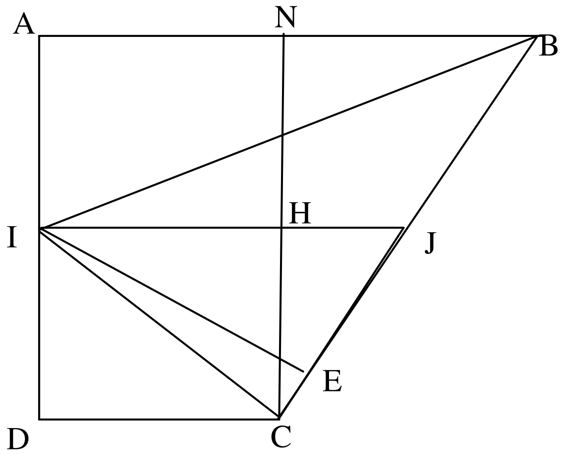
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

Câu IV. Từ giả thiết bài toán ta suy ra SI thẳng góc với mặt phẳng ABCD, gọi J là trung điểm của BC; E là hình chiếu của I xuống BC.

$$IJ = \frac{2a+a}{2} = \frac{3a}{2} \quad S_{CIJ} = \frac{IJ \times CH}{2} = \frac{1}{2}\frac{3a}{2}a = \frac{3a^2}{4} \text{ , } CJ = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{CIJ} = \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{2} IE \times CJ \Rightarrow IE = \frac{1}{CJ}\frac{3a^2}{2} = \frac{3a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SE = \frac{6a}{\sqrt{5}}, SI = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left[a+2a\right]2a\right)\frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$



Câu V. x(x+y+z) = 3yz $\Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3\frac{y}{x}\frac{z}{x}$

Đặt $u = \frac{y}{x} > 0, v = \frac{z}{x} > 0, t = u + v > 0$. Ta có

$$1 + t = 3uv \le 3\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 3\frac{t^2}{4} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+2) \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2$$

Chia hai vế cho x^3 bất đẳng thức cần chứng minh đưa về

$$(1+u)^3 + (1+v)^3 + 3(1+u)(1+v)(u+v) \le 5(u+v)^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 3(1+u)^2(1+v) - 3(1+u)(1+v)^2 + 3(1+u)(1+v)t \le 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u)(1+v) \le 5t^3 \Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u+v+uv) \le 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6\left(1 + t + \frac{1+t}{3}\right) \le 5t^3 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 4t \ge 0 \Leftrightarrow t(2t+1)(t-2) \ge 0$$

Đúng do t ≥ 2.

PHẦN RIÊNG

A.Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a. 1. I (6; 2); M (1; 5)

Δ : x + y – 5 = 0, E ∈ Δ ⇒ E(m; 5 – m); Gọi N là trung điểm của AB

I trung điểm NE $\Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_E = 12 - m \\ y_N = 2y_I - y_E = 4 - 5 + m = m - 1 \end{cases} \Rightarrow$ N (12 – m; m – 1)

$\overrightarrow{MN}$ = (11 – m; m – 6); $\overrightarrow{IE}$ = (m – 6; 5 – m – 2) = (m – 6; 3 – m)

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE} = 0$ ⇔ (11 – m)(m – 6) + (m – 6)(3 – m) = 0

⇔ m – 6 = 0 hay 14 – 2m = 0 ⇔ m = 6 hay m = 7

+ m = 6 ⇒ $\overrightarrow{MN}$ = (5; 0) ⇒ pt AB là y = 5

+ m = 7 ⇒ $\overrightarrow{MN}$ = (4; 1) ⇒ pt AB là x – 1 – 4(y – 5) = 0 ⇒ x – 4y + 19 = 0

2. I (1; 2; 3); R = $\sqrt{1+4+9+11} = 5$

d (I; (P)) = $\dfrac{|2(1)-2(2)-3-4|}{\sqrt{4+4+1}} = 3$ < R = 5. Vậy (P) cắt (S) theo đường tròn (C)

Phương trình d qua I, vuông góc với (P) : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-t \end{cases}$

Gọi J là tâm, r là bán kính đường tròn (C). J $\in$ d $\Rightarrow$ J (1 + 2t; 2 – 2t; 3 – t)

J $\in$ (P) $\Rightarrow$ 2(1 + 2t) – 2(2 – 2t) – 3 + t – 4 = 0 $\Rightarrow$ t = 1

Vậy tâm đường tròn là J (3; 0; 2)

Bán kính đường tròn r = $\sqrt{R^2 - IJ^2} = \sqrt{25-9} = 4$

Câu VII.a. Δ' = -9 = $9i^2$ do đó phương trình $\Leftrightarrow$ z = z_1 = -1 – 3i hay z = z_2 = -1 + 3i

$\Rightarrow$ A = $|z_1|^2 + |z_2|^2$ = (1 + 9) + (1 + 9) = 20

B. Theo Chương trình Nâng Cao

Câu VI.b. 1. (C) : $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ có tâm là I (-2; -2); R = $\sqrt{2}$

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Kẻ đường cao IH của ΔABC, ta có

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \sin\widehat{AIB}$

Do đó $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \Delta AIB$ vuông tại I

$\Leftrightarrow IH = \dfrac{IA}{\sqrt{2}} = 1$ (thỏa IH < R) $\Leftrightarrow \dfrac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = \dfrac{8}{15}$

2. M (-1 + t; t; -9 + 6t) $\in \Delta_1$; Δ_2 qua A (1; 3; -1) có véctơ chỉ phương $\vec{a}$ = (2; 1; -2)

$\overrightarrow{AM}$ = (t – 2; t – 3; 6t – 8) $\Rightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}$ = (14 – 8t; 14t – 20; 4 – t)

Ta có : d (M, Δ_2) = d (M, (P)) $\Leftrightarrow \sqrt{261t^2 - 792t + 612} = |11t - 20|$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = \dfrac{53}{35}$

Vậy M (0; 1; -3) hay M $\left(\dfrac{18}{35}; \dfrac{53}{35}; \dfrac{3}{35}\right)$

Câu VII.b. Điều kiện x, y > 0

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = \log_2 2 + \log_2(xy) = \log_2(2xy) \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$